

Graph Packing and Covering Problems - Computational Complexity and Algorithms Design

-

著者	八木田 剛
発行年	2021-03-25
その他のタイトル	グラフ上の分割問題と被覆問題：計算量解析とアルゴリズム設計
学位授与番号	17104甲情工第355号
URL	http://hdl.handle.net/10228/00008299

氏 名	八木田 剛
学位の種類	博 士 (情報工学)
学位記番号	情工博甲第 3 5 5 号
学位授与の日付	令和 3 年 3 月 2 5 日
学位授与の条件	学位規則第 4 条第 1 項該当
学位論文題目	Graph Packing and Covering Problems-Computational Complexity and Algorithms Design - (グラフ上の分割問題と被覆問題：計算量解析と アルゴリズム設計)
論文審査委員	主 査 教 授 宮 野 英 次 " 佐 藤 好 久 " 坂 本 比呂志 准教授 齋 藤 寿 樹

学 位 論 文 内 容 の 要 旨

本論文では、入力としてグラフが与えられたとき、ある目的関数値を最適にするようにグラフを分割する問題、および辺や頂点を被覆する頂点集合を探索する問題について取り扱っている．具体的には、(1) 最小ブロック転送問題 (MBT)、(2) 最大 k パス頂点被覆問題 (MaxPkVC)、(3) k パス頂点被覆遷移問題 (k -PVCR)、(4) 最小 (最大) (パス長) 重み付きパス被覆問題 (MinPC (MaxPC)) の 4 つのグラフ最適化問題を対象に、計算困難性、近似容易性、近似困難性、近似不可能性などの計算困難性を証明し、また多項式時間アルゴリズムの設計を行っている．

第 2 章では MBT を議論している． V を頂点集合、 A を有向辺集合とし、 $G=(V,A)$ を単純有向非巡回グラフ (DAG) とする．DAG とブロック容量 B が与えられたとき、(1) 分割の要素 (ブロックと呼ぶ) は頂点を高々 B 個含み、(2) DAG の根から葉へ向かう有向道における外部有向辺の最大数を最小化することを目的とする．ここで外部有向辺とは、異なる 2 つのブロックを繋ぐ辺のことであり、DAG の高さは、DAG 中の根から葉への最長有向道の長さとして定義する．本問題は、異なる 2 メモリ間のデータ転送最大回数が最小となるような効率的なデータ格納に関する応用が知られている．本論文では、MBT 問題の計算困難性、近似精度保証付きの準最適アルゴリズム (近似容易性) を示し、さらには、近似精度保証することができるアルゴリズムの性能限界 (近似困難性) を理論的に示している．

第 3 章では MaxPkVC を議論している． V と E をそれぞれ頂点集合と辺集合とし、単純無向グラフ $G=(V,E)$ を考える．長さ $k-1$ のパスを k パスと呼ぶ．ある k パス P_k 上の頂点 v が頂点部分集合 S に含まれるとき、 S もしくは v は P_k を被覆する (カバー

する) という. グラフ G と整数 s が与えられ, MaxPkVC の目的は, カバーする k パスの数が最大であるような高々 s 頂点の頂点部分集合 S を見つけることである. MaxPkVC は, グラフ最適化研究の分野で古くから多くの研究がある問題をより一般化した問題であり, また, ネットワークセキュリティの安全性保証に応用を持つことが知られている. 本論文では, 入力グラフを制限した場合にも MaxP3VC が計算困難となることを示している. 一方で, 入力頂点の選択可能サイズや木幅と呼ばれるパラメータが小さい場合には高速なアルゴリズムが設計できること (固定パラメータ容易性) を示している.

第4章では $k\text{-PVCR}$ の遷移問題の枠組みで議論を行っている. 遷移問題の設定では, 2つの解が入力として与えられたときに, 暫定解の実行可能性を壊すことなく遷移できるか, さらに最適なステップで遷移できるかを議論する. 本論文では, 入力を平面グラフ, 帯域幅制限グラフ, 弦グラフ, 2部グラフとしても $k\text{-PVCR}$ が計算困難 (PSPACE 完全) となることを示している. 一方で, 木グラフ, パスグラフとサイクルグラフに限定した場合の $k\text{-PVCR}$ に対する多項式時間アルゴリズムを与えている.

第5章では MinPC (MaxPC) を扱っている. まず, 古くから多くの研究があるハミルトンパス問題や, 最大マッチング問題を特別な場合として含む形でパス被覆問題を定義し, この一般化した問題に対して, 計算困難性, 近似不可能性, 固定したグラフパラメータに対する高速アルゴリズムを示している.

学位論文審査の結果の要旨

提出論文で扱っているグラフ分割問題およびグラフ被覆問題は, アルゴリズム論, オペレーションズリサーチ, 計算量理論の研究分野において多くの研究が行われてきたグラフ最適化問題を一般化した問題という意味で重要な問題である. この重要なグラフ最適化問題の計算容易性/困難性, 近似容易性/困難性/不可能性, 固定パラメータ容易性を詳細に調べており, 従来結果を改善した結果も複数示していることが確認できた. また, 本論文について最終試験を行った結果, 満足な回答が得られた.

以上により, 論文調査及び最終試験の結果に基づき, 審査委員会において慎重に審査した結果, 本論文が, 博士 (情報工学) の学位に十分値するものであると判断した.